

## Mathe für Informatiker II

### Übungsblatt 11, Aufgabe 78:

#### Differentiation von Umkehrfunktionen

Gegeben sei folgende Formel:

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y}$$

Gesucht werden:

$$f^{-1}(M_2 + M_3) = ? \quad (1)$$

$$(f^{-1})'(M_2 + M_3) = ? \quad (2)$$

$$(f^{-1})''(M_2 + M_3) = ? \quad (3)$$

Wir wissen aus dem Script (Seite 97) die erste Gleichung. Diese leiten wir erneut ab und erhalten:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})''(x) &= -\frac{1}{f'(f^{-1}(x))^2} * f''(f^{-1}(x)) * \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3} \end{aligned} \quad (5)$$

Nun betrachten wir uns einmal unsere Ausgangsgleichung:

$$f(y) = M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} \quad (6)$$

$$f'(y) = M_1 + M_3 * M_4 \cdot e^{M_4 \cdot y} \quad (7)$$

$$f''(y) = M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot y} \quad (8)$$

Jetzt setzen wir (1) in (6) ein.

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(M_2 + M_3)) &= M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} \\ M_2 + M_3 &= M_1 \cdot y + M_2 + M_3 \cdot e^{M_4 \cdot y} \end{aligned}$$

Daraus können wir schlußfolgern, daß  $y = 0$  sein muß. Die e-Funktion ergibt nur im Falle von  $e^0$  eine ganze Zahl, nämlich die 1. Wir wissen somit also:

$$\begin{aligned} f(0) &= M_1 \cdot 0 + M_2 + M_3 \cdot 1 \\ &= M_2 + M_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$f^{-1}(M_2 + M_3) = 0 \quad (10)$$

Nun benutzen wir unsere Erkenntnisse aus (5) und rechnen damit weiter:

$$\begin{aligned}
 (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
 (f^{-1})'(M_2 + M_3) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(M_2 + M_3))} \\
 &= \frac{1}{f'(0)} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_3 * M_4 \cdot e^{M_4 \cdot 0}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_3 * M_4 \cdot e^0} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_3 * M_4 \cdot 1} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_3 * M_4}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 (f^{-1})''(x) &= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3} \\
 (f^{-1})''(M_2 + M_3) &= -\frac{f''(f^{-1}(M_2 + M_3))}{f'(f^{-1}(M_2 + M_3))^3} \\
 &= -\frac{f''(0)}{f'(0)^3} \\
 &= -\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot e^{M_4 \cdot 0}}{(M_1 + M_3 * M_4 \cdot e^{M_4 \cdot 0})^3} \\
 &= -\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot 1}{(M_1 + M_3 * M_4 \cdot 1)^3} \\
 &= -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 * M_4)^3}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Zusammengefasst aus den Formeln (10), (11) und (12) haben wir nun unser Ergebnis:

$$f^{-1}(M_2 + M_3) = 0 \tag{13}$$

$$(f^{-1})'(M_2 + M_3) = \frac{1}{M_1 + M_3 * M_4} \tag{14}$$

$$(f^{-1})''(M_2 + M_3) = -\frac{M_3 \cdot M_4^2}{(M_1 + M_3 * M_4)^3} \tag{15}$$

Erstellt von Martin Kuhlmann, Juli 2002

Mail: darkjedi@neodoomer.de und

Besucht <http://www.upb.de/uninet>, wenn ihr Fragen habt!